

# Courbes CTLB et leurs applications en géométrie discrète

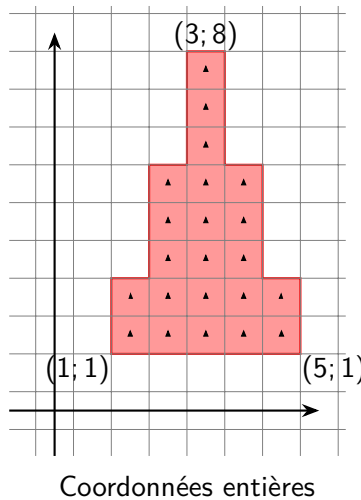
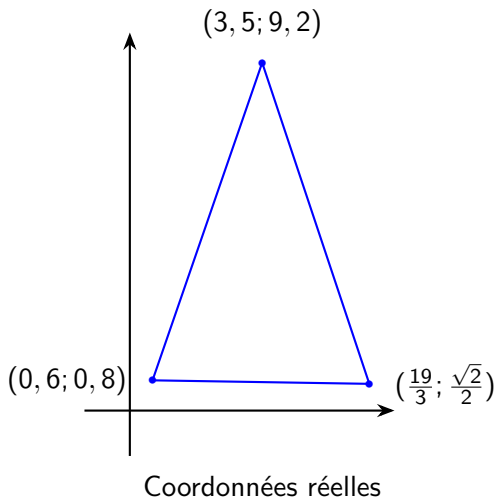
Étienne LE QUENTREC

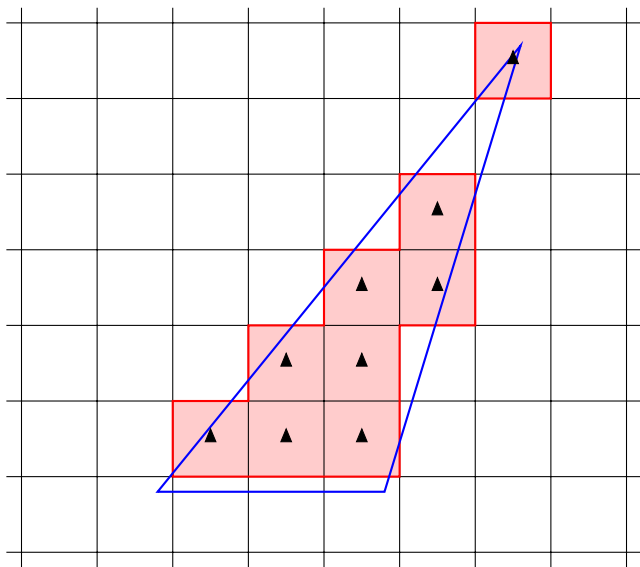
17 décembre 2021

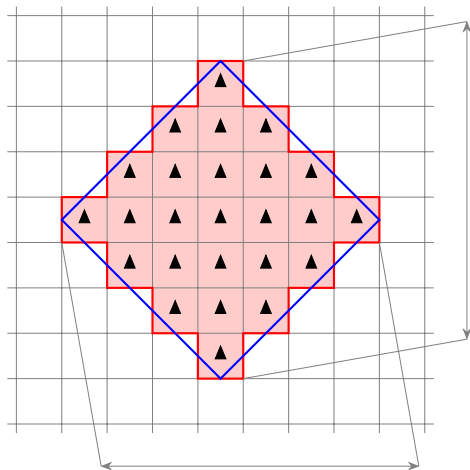
doctorat dirigé par Mohamed TAJINE  
et encadré par Étienne BAUDRIER et Loïc MAZO

Images numériques :

- Images acquises numériquement : microscope, IRM en imagerie biomédicale, images satellites, ...
- Images générées sur ordinateur : rendu graphique, images synthétiques, GAN, ...





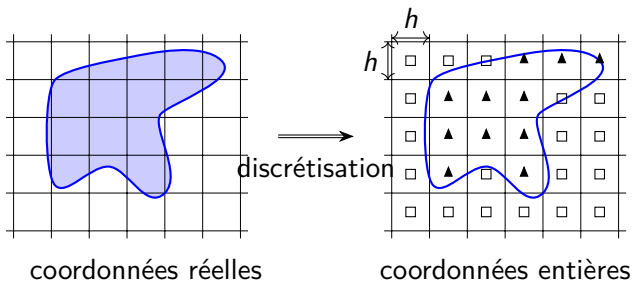


$2 \times 7$  segments  
verticaux

$2 \times 7$  segments  
horizontaux  
Périmètre naïf = 28

# Discrétisation de Gauss

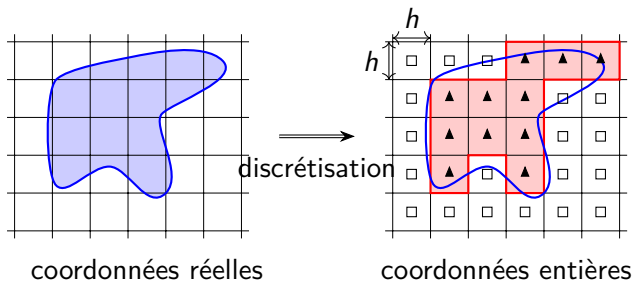
Différentes discrétisations : discrétisation surfacique [GL95],  
discrétisation de superrecouvrement, discrétisation de Hausdorff  
[RT00], **discrétisation de Gauss**, ...



- $\mathcal{C}$  frontière de  $S$
- reconstruction de  $S$
- $\partial_h(\mathcal{C})$  bord discret
- ▲ points intérieurs
- points extérieurs

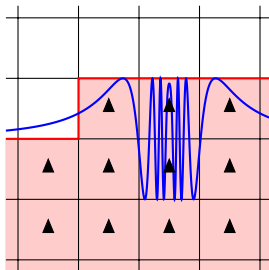
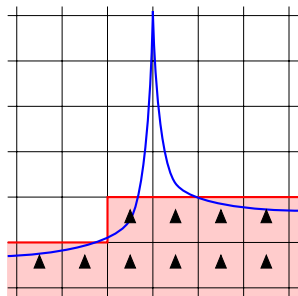
# Discrétisation de Gauss

Différentes discrétisations : discrétisation surfacique [GL95],  
discrétisation de superrecouvrement, discrétisation de Hausdorff  
[RT00], **discrétisation de Gauss**, ...



- $\mathcal{C}$  frontière de  $S$
- ◻ points extérieurs
- ◻ reconstruction de  $S$
- ◻ points intérieurs
- $\partial_h(\mathcal{C})$  bord discret

Problèmes géométriques :



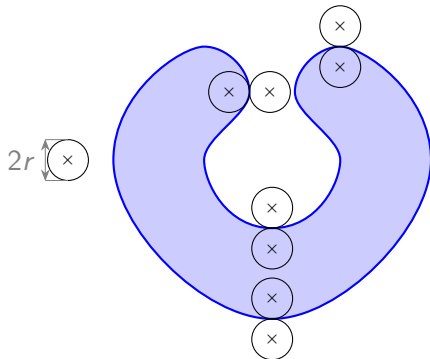
**Problématique :** hypothèses à ajouter pour permettre de reconstruire la topologie et les caractéristiques géométriques ?



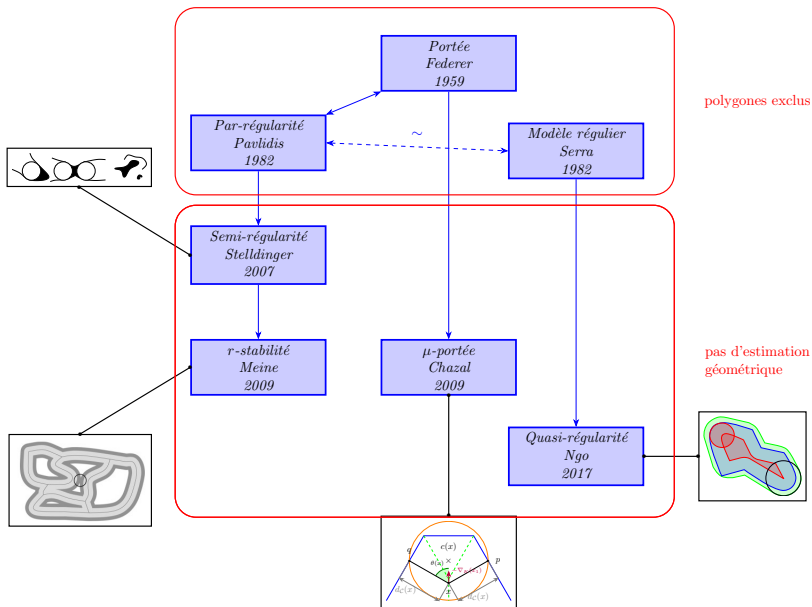
- 1 Introduction
- 2 Hypothèses sur la forme continue
- 3 Topologie de la discrétisation d'une forme à bord CTLB
- 4 Estimation géométrique

# Hypothèses imposées au bord de l'objet continu

Nécessité d'imposer des hypothèses à la courbe  $\mathcal{C}$ .  
par( $r$ )-régularité [Pav82] :



# Généralisations de la par-régularité



Définition de la courbure totale d'un polygone.

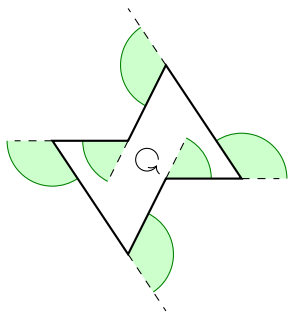


FIGURE – La courbure totale du polygone est la somme des angles verts.

Définition (Courbure totale, [Mil50])

$$\kappa(\mathcal{C}) := \sup_P \kappa(P)$$

$P$  polygone inscrit dans  $\mathcal{C}$ .

### Propriété ([AR89])

*Pour une courbe paramétrée par longueur d'arc  $\gamma$  de régularité  $C^2$ ,*

$$\kappa(\gamma) = \int_0^{L(\gamma)} |k(s)| ds,$$

*où  $k(s)$  est la courbure de  $\gamma$  au point  $\gamma(s)$ .*

### Théorème (Théorème de Fenchel-Alexandrov-Reshetnyak, [AR89])

*Pour toute courbe de Jordan  $C$ ,  $\kappa(C) \geq 2\pi$ .*

*L'égalité est vérifiée ssi  $C$  est d'intérieur convexe.*

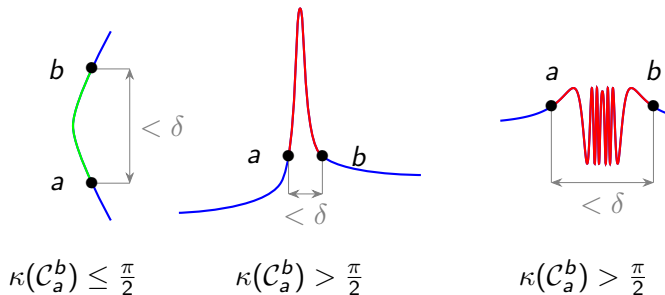
# Courbes à courbure totale localement bornée

Définition (Courbes CTLB [DGCI 2019])

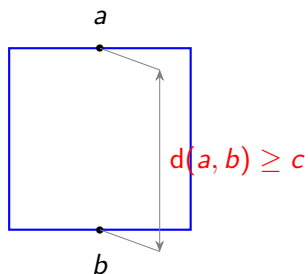
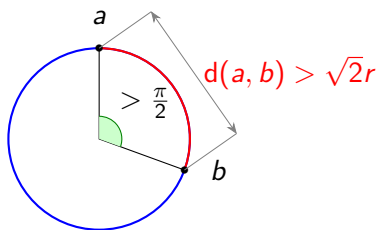
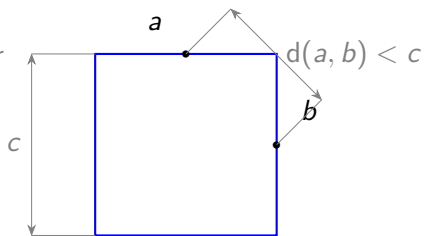
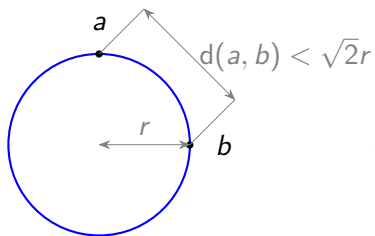
Une courbe  $\mathcal{C}$  est à **Courbure Totale Localement Bornée** par  $(\theta, \delta)$  ( $(\theta, \delta)$ -CTLB) si :

$$\forall a, b \in \mathcal{C}, \|b - a\| < \delta, \quad \exists \mathcal{C}_a^b, \kappa(\mathcal{C}_a^b) \leq \theta.$$

$$\delta\text{-CTLB} := \left(\frac{\pi}{2}, \delta\right)\text{-CTLB}.$$



# Examples

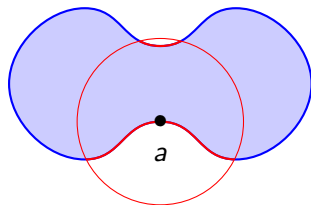
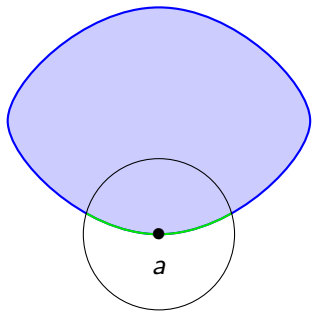


$$\delta_{max} = \sqrt{2}r$$

$$\delta_{max} = c$$

## Proposition (Connexité locale)

Pour  $\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB, point  $a \in \mathcal{C}$ ,  $\epsilon \leq \delta$ ,  
l'intersection de  $\mathcal{C} \cap B(a, \epsilon)$  est connexe par arc.

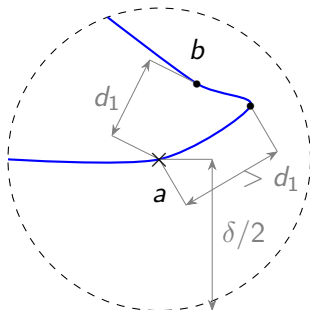




## Proposition (Croissance locale)

$\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB,  $a \in \mathcal{C}$ ,  $\mathcal{A} := \mathcal{C} \cap \bar{B}(a, \frac{\delta}{2})$ .

Pour  $b \in \mathcal{A}$  la distance  $d(a, b)$  augmente lorsque la longueur de l'arc entre  $a$  et  $b$  augmente.

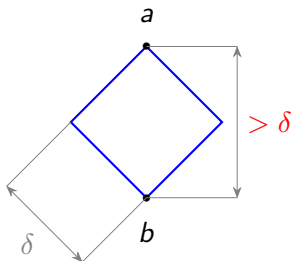


Configuration exclue d'une courbe CTLB!

# Arc le plus droit

Définition  $\delta$ -CTLB : un arc de courbure totale inférieur à  $\frac{\pi}{2}$  entre  $a$  et  $b$   $d(a, b) < \delta$ .

Lequel ?



Proposition (Unicité de l'arc le plus droit)

Pour  $C$   $\delta$ -CTLB,  $d(a, b) < \delta$ , unicité de l'arc  $C|_a^b$  tel que  $\kappa(C|_a^b) \leq \frac{\pi}{2}$ .

Cet arc est appelé **arc le plus droit** entre  $a$  et  $b$ .

Définition (Courbe à courbure totale lipschitzienne  [JMIV 2020])

$\mathcal{C}$  est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne si pour tout sous-arc  $\mathcal{A}$  de  $\mathcal{C}$  :

$$\kappa(\mathcal{A}) \leq \frac{1}{r} \mathcal{L}(\mathcal{A}).$$

Proposition

$\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB et à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne,  $a, b \in \mathcal{C}$  avec  $d(a, b) < \delta$

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r_1 \arcsin \left( \frac{d(a, b)}{2r_1} \right),$$

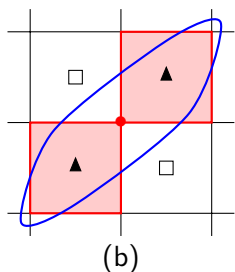
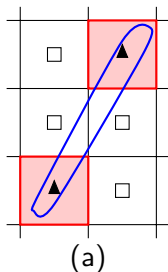
avec  $r_1 := \min(r, \frac{\delta}{2})$ .

## Proposition (Équivalence avec par-régularité [JMIV 2020])

- Toute courbe  $\text{par}(r)$ -régulière est  $(\theta, 2r \sin(\frac{\theta}{2}))$ -CTLB pour  $\theta \in ]0, \pi]$  et est à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.
- Toute courbe  $\delta$ -CTLB à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne est  $\text{par}(r_1)$ -régulière pour  $r_1 < \min(\frac{\delta}{2}, r)$ .

- 1 Introduction
- 2 Hypothèses sur la forme continue
- 3 Topologie de la discrétisation d'une forme à bord CTLB**
- 4 Estimation géométrique

# Problèmes topologiques lors de la discrétisation



$x, y \in h\mathbb{Z}^2$ ,

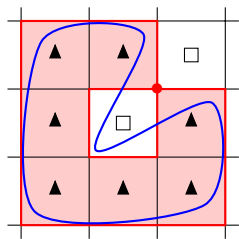
$x$  et  $y$  sont 8-adjacents si  $d(x, y) \leq \sqrt{2}h$

$x$  et  $y$  sont 4-adjacents si  $d(x, y) \leq h$

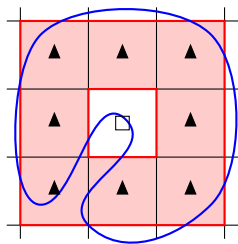
$k$ -adjacence étendue par transitivité en relation d'équivalence :

$k$ -connexité  $k = 4, 8$ .

# Problèmes topologiques lors de la discrétisation



(c)



(d)

$A \subset h\mathbb{Z}^2$  **bien composé** si toute composante 8-connexe de  $A$  (resp. de  $A^c$ ) est 4-connexe.

## Définition (Hypothèses de compatibilité)

Une grille de pas  $h$  est compatible avec une courbe  $\delta$ -CTLB si

- $h < \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$ ,
- $h < \frac{1}{2}\text{diam}(\mathcal{C})$ ,

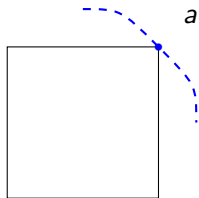
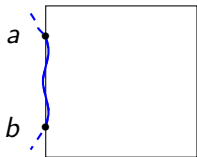
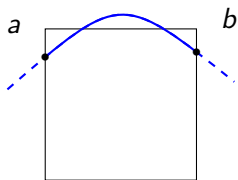
## Théorème (Préserver de la topologie 🖱️[JMIV 2020])

*Pour  $\mathcal{C}$  courbe  $\delta$ -CTLB compatible avec la grille, la discrétisation de Gauss est bien composée et 4-connexe et le bord de la discrétisation  $\partial_h(\mathcal{C})$  est une courbe de Jordan.*



# Arc le plus droit passant par un pixel dual

Pixel dual : pixel translaté de  $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .



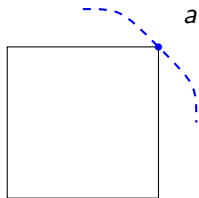
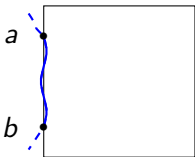
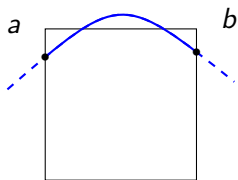
# Arc le plus droit passant par un pixel dual

Pixel dual : pixel translaté de  $h(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

Définition (Arc le plus droit passant par un pixel dual)

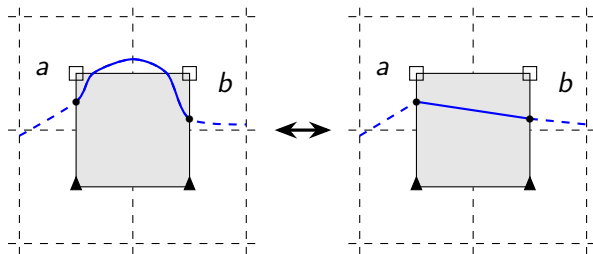
Arc le plus droit passant par un pixel dual  $P$  :

$$\mathcal{C}_P := \bigcup_{a,b \in P} \mathcal{C}|_a^b$$

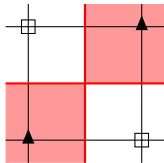


## Proposition

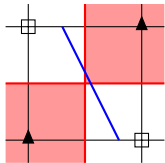
$\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB,  $T$  pixel dual compatible avec  $\mathcal{C}$ ,  $a, b$  extrémités de  $\mathcal{C}_T$   
Deux sommets de  $T$  dans la même composante connexe ssi ils sont dans la même composante de  $T \setminus [a, b]$



# Exclusion de configurations

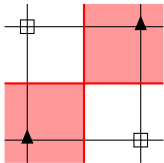


# Exclusion de configurations



Configuration exclue de la discrétisation d'une courbe compatible.

# Exclusion de configurations



Cas où la courbe passe par un sommet traités différemment.

# Configurations exclues



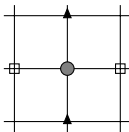
Configuration A



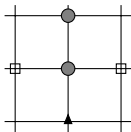
Configuration B



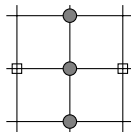
Configuration C



Configuration D



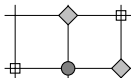
Configuration E



Configuration F



Configuration G



Configuration H

- points frontaliers
- ◆ points intérieurs ou frontaliers

- 1 Introduction
- 2 Hypothèses sur la forme continue
- 3 Topologie de la discrétisation d'une forme à bord CTLB
- 4 Estimation géométrique**

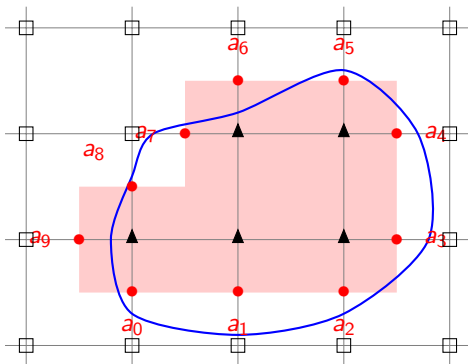


# Estimation de longueur

Objectif : démontrer la convergence multirésolution d'une famille d'estimateurs discrets de longueurs

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_{Est}(\partial_h(C)) = \mathcal{L}(C).$$

avec  $\mathcal{L}_{Est}(\partial_h(C)) := \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$ .

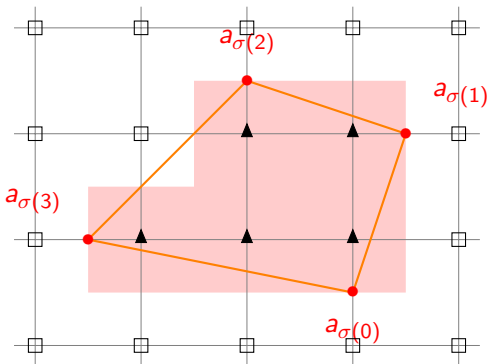


# Estimation de longueur

Objectif : démontrer la convergence multirésolution d'une famille d'estimateurs discrets de longueurs

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{L}_{Est}(\partial_h(C)) = \mathcal{L}(C).$$

avec  $\mathcal{L}_{Est}(\partial_h(C)) := \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$ .



Convergence multirésolution dépend du choix des sommets  $(a_\sigma(i))_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$  de  $\mathcal{A}_h$ .

Classification de la plupart des estimateurs en fonction de la taille  $\|a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)}\|$  :

- **Estimateurs locaux** : [VS82, DS87]
- **Taille des segments** : nombre de pixels constants
- **Convergence multirésolution ?** Nombreux contre-exemples : [KMRT93, Théorème 1], [TD03], [DTZ09, TD11]

Classification de la plupart des estimateurs en fonction de la taille  $\|a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)}\|$  :

- **Estimateurs adaptatifs** : MDSS [Deb95] et MLP [SZ96]
- **Taille des segments** : déterminée algorithmiquement en fonction de la forme discrète
- **Convergence multirésolution ?**
  - MLP : classe  $C^\infty$  [SZS98, Théorème 4.13], polygones convexes [AKKO01, Théorème 2]
  - MDSS : polygones convexes [KŽ00, Théorème 13]

Classification de la plupart des estimateurs en fonction de la taille  $\|a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)}\|$  :

- **Estimateurs non-locaux** : [MB16], regroupe plusieurs estimateurs
- **Taille des segments** : tend en moyenne plus lentement vers 0 que  $h$
- **Convergence multirésolution ?** graphes de fonction lipschitzienne [MB16]

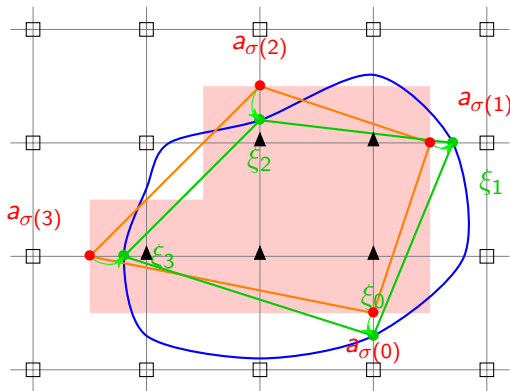
$$M_{\alpha}((a_{\sigma(i)})_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}) := \left( \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \|a_{\sigma(i+1)} - a_{\sigma(i)}\|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Objectif : démontrer la convergence multirésolution des estimateurs non-locaux pour des courbes paramétriques.

# Majoration de l'erreur d'estimation

- 1 associer à chaque segment  $[a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)}]$  de  $\mathcal{A}_h$  un arc  $\mathcal{C}|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$  de  $\mathcal{C}$
- 2 majorer **erreur d'échantillonnage** (différence de longueur de l'arc  $\mathcal{C}|_{\xi_i}^{\xi_{i+1}}$  et de la corde  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ )
- 3 majorer **erreur de quantification** (différence de longueur des cordes  $[\xi_i, \xi_{i+1}]$  de  $\mathcal{C}$  et des cordes  $[a_{\sigma(i)}, a_{\sigma(i+1)}]$  de  $\partial_h(\mathcal{C})$ )
- 4 sommer les erreurs pour chaque arc

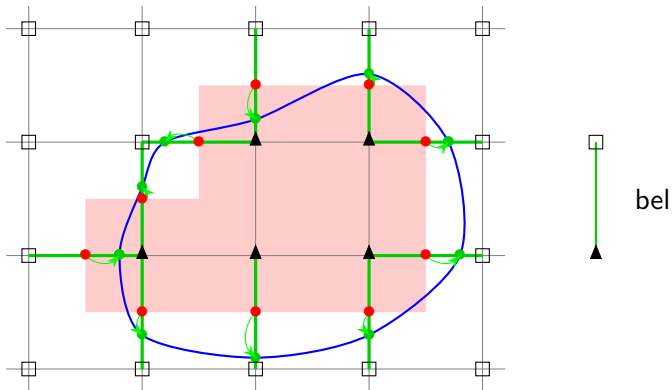
Majoration de l'erreur d'estimation : comparer chaque segment du polygone  $\mathcal{A}_h$  à un arc de  $\mathcal{C}$ .  
Lequel ?



[LT16] : projection sur la courbe

# Rétro-discrétisation (Définition)

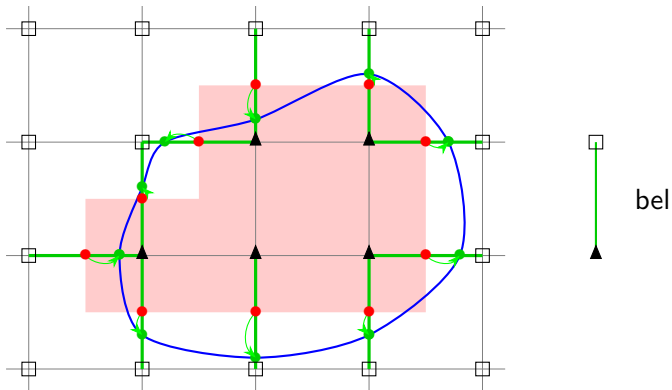
Majoration de l'erreur d'estimation : comparer chaque segment du polygone  $P$  à un arc de  $\mathcal{C}$ . Lequel?





# Rétro-discrétisation (Définition)

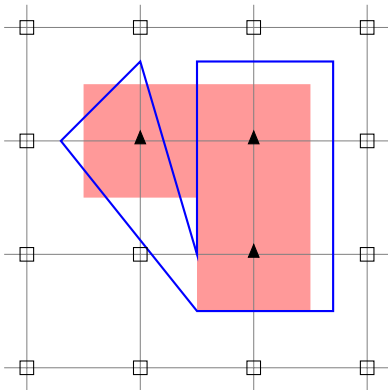
Majoration de l'erreur d'estimation : comparer chaque segment du polygone  $P$  à un arc de  $\mathcal{C}$ . Lequel?



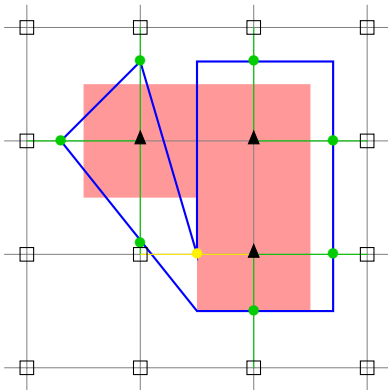
Définition (Rétro-discrétisation [\[article soumis\]](#))

Une **rétro-discrétisation**  $\xi$  associe à tout bel une intersection du bel et de la courbe  $\mathcal{C}$ .

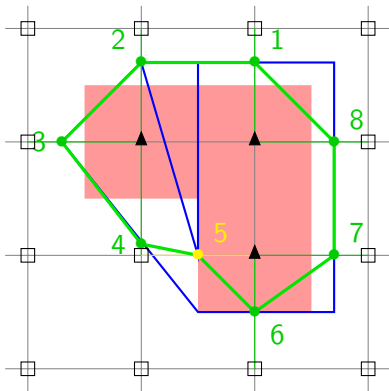
Problème : polygone associé inscrit dans  $\mathcal{C}$  ?



Problème : polygone associé inscrit dans  $\mathcal{C}$  ?



Problème : polygone associé inscrit dans  $\mathcal{C}$  ?



## Théorème (Croissance des rétro-discrétisations, [article soumis])

- *hypothèses de compatibilité,*
- *$(a_{\sigma(i)})$  une sous-suite de la suite des bords  $(a_i)$  telle que pour tout  $i$ ,  $|\sigma(i+1) - \sigma(i)| \leq \max(1, \frac{\delta}{h} - 1)$ ,*
- *$\xi$  une rétro-discrétisation.*

Alors :

- *$\xi$  conserve l'ordre de la suite  $(a_{\sigma(i)})$*
- *la suite  $(\xi(a_{\sigma(i)}))$  partitionne la courbe  $\mathcal{C}$  en arcs de courbure totale inférieure à  $\frac{\pi}{2}$ .*

## Théorème ([AR89])

$\mathcal{C}_a^b$  arc délimité par  $a$  et  $b$  tel que  $\kappa(\mathcal{C}_a^b) < \pi$ , alors

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}_a^b) \leq \frac{d(a, b)}{\cos \frac{\kappa(\mathcal{C}_a^b)}{2}}.$$

## Proposition

$\mathcal{C}$   $\delta$ -CTLB et à courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne,  $a, b \in \mathcal{C}$  avec  $d(a, b) < \delta$

$$\mathcal{L}(\mathcal{C}|_a^b) \leq 2r_1 \arcsin \left( \frac{d(a, b)}{2r_1} \right),$$

avec  $r_1 := \min(r, \frac{\delta}{2})$ .

# Théorème de convergence d'un estimateur non-local (cas régulier), [article soumis]

Notation :  $\mathcal{A}_h := (a_{\sigma(i)}^h)$  et  $\mathcal{L}_{Est}(\mathcal{C}) := \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$

Soit  $\mathcal{C}$  CTLB et de courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.

Alors, :

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

# Théorème de convergence d'un estimateur non-local (cas régulier), [article soumis]

Notation :  $\mathcal{A}_h := (a_{\sigma(i)}^h)$  et  $\mathcal{L}_{Est}(\mathcal{C}) := \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)$

Soit  $\mathcal{C}$  CTLB et de courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.

Alors, :

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

Converge si

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ .

+ Majoration de l'erreur d'estimation calculable algorithmiquement.



# Théorème de convergence d'un estimateur non-local (cas général) [article soumis]

Soit  $\mathcal{C}$  CTLB. ~~et de courbure totale  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.~~

$\forall \mu \in ]0, 1[ :$

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (forte courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (faible courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

# Théorème de convergence d'un estimateur non-local (cas général) [article soumis]

Soit  $\mathcal{C}$  CTLB. ~~et de courbure totale~~  $\frac{1}{r}$ -lipschitzienne.

$\forall \mu \in ]0, 1[$  :

$$\begin{aligned} & |\mathcal{L}(\mathcal{C}) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( (M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (forte courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_\infty(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (faible courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

Converge si

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,
- $M_\infty(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$

+ Majoration de l'erreur d'estimation calculable algorithmiquement.

# Exemple sur polygone équilatéral

Si  $\mathcal{A}_h$  est un polygone équilatéral.

- Cas régulier : meilleure vitesse de convergence en choisissant  $M_1(\mathcal{A}_h) := h^{\frac{1}{3}}$  :

$$|\mathcal{L}(C) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| = O_{h \rightarrow 0} h^{\frac{2}{3}}$$

- Cas général : meilleure vitesse de convergence en choisissant  $\mu := \frac{1}{2}$  et  $M_1(\mathcal{A}_h) := h^{\frac{2}{3}}$  :

$$|\mathcal{L}(C) - \mathcal{L}(\mathcal{A}_h)| = O_{h \rightarrow 0} h^{\frac{1}{3}}$$

Estimateur de l'intégrale curviligne de  $f$  le long de  $\mathcal{C}$  connaissant  $(f(a_i))_{i \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}}$  :

$$\text{Int}(f, (a_i)) := \sum_{i=0}^{N_h-1} f(a_i) \|a_{i+1} - a_i\|.$$

Hypothèses :

- courbe CTLB,
- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  fonction  $(k_1, \alpha_1)$ -hölderienne,
- $f$   $(k_2, \alpha_2)$ -hölderienne en fonction de la longueur d'arc.

# Estimation intégrale curviligne (cas régulier)

Mêmes hypothèses que pour l'estimation de longueur

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{\mathcal{C}} f(s) ds - \text{Int}(f, (a_i)) \right| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur rectangles à gauche} \\ &+ O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1})} \right\} \text{erreur de positionnement} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

# Estimation intégrale curviligne (cas régulier)

Mêmes hypothèses que pour l'estimation de longueur

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{\mathcal{C}} f(s) ds - \text{Int}(f, (a_i)) \right| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \left. \vphantom{\frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur rectangles à gauche} \\ &+ O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1})} \right\} \text{erreur de positionnement} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \left. \vphantom{\frac{M_3(\mathcal{A}_h)^3}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \left. \vphantom{\frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

Converge si

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_\infty(\mathcal{A}_h) = 0$ ,

# Estimation intégrale curviligne (cas général)

Mêmes hypothèses que pour l'estimation de longueur

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{\mathcal{C}} f(s) ds - \text{Int}(f, (a_i)) \right| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur rectangles à gauche} \\ &+ O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1})} \right\} \text{erreur de positionnement} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( (M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \quad \left. \vphantom{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (forte courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (faible courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

# Estimation intégrale curviligne (cas général)

Mêmes hypothèses que pour l'estimation de longueur

$$\begin{aligned} & \left| \oint_{\mathcal{C}} f(s) ds - \text{Int}(f, (a_i)) \right| \\ &= O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{M_{1+\alpha_2} (\|a_{\sigma(i+1)}^h - a_{\sigma(i)}^h\| + h)^{1+\alpha_2}}{M_1(\mathcal{A}_h)}}} \right\} \text{erreur rectangles à gauche} \\ &+ O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1}) \quad \left. \vphantom{O_{h \rightarrow 0}(h^{\alpha_1})} \right\} \text{erreur de positionnement} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( (M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu} \right) \quad \left. \vphantom{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{1-\mu}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (forte courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{(M_{\infty}(\mathcal{A}_h) + h)^{2\mu}}{M_1(\mathcal{A}_h)^{1/2}}} \right\} \text{erreur d'échantillonnage (faible courbure)} \\ &+ O_{h \rightarrow 0} \left( \frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{h}{M_1(\mathcal{A}_h)}} \right\} \text{erreur de quantification} \end{aligned}$$

Converge si :

- $h = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ ,
- $\lim_{h \rightarrow 0} M_{\infty}(\mathcal{A}_h) = 0$ ,
- $M_{\infty}(\mathcal{A}_h)^{4\mu} = o_{h \rightarrow 0}(M_1(\mathcal{A}_h))$ .



- Courbes CTLB : cadre pour la topologie et l'estimation géométrique
- Définition de la rétro-discrétisation permettant de comparer la courbe continue à sa discrétisation
- Convergence des estimateurs non-locaux résulte d'un compromis entre plusieurs termes d'erreurs

- Implémenter test des vitesses de convergence,
  - implémentation des courbes CTLB ?
  - calcul de la discrétisation ?
  - choix des points d'échantillonnage ?
- Construction d'une courbe compatible avec la grille à partir d'une forme discrète,
  - ⇒ application aux transformations rigides.
- Extension à la 3D.
  - topologie locale,
  - topologie de la discrétisation
  - rétro-discrétisation
  - estimation sur une surface

Merci pour votre attention !

 Tetsuo Asano, Yasuyuki Kawamura, Reinhard Klette, and Koji Obokata.

Minimum-Length Polygons in Approximation Sausages.

*Lecture Notes in Computer Science*, 2059 :103–112, January 2001.

 A. D. Alexandrov and Yu. G. Reshetnyak.

*General Theory of Irregular Curves*, volume 29 of *Mathematics and Its Applications*.

Springer Netherlands, Dordrecht, 1989.

 Isabelle Debled-Rennesson.

*Etude et Reconnaissance Des Droites et Plans Discrets*.

These de doctorat, Strasbourg 1, January 1995.

-  Leo Dorst and Arnold W. M. Smeulders.  
Length estimators for digitized contours.  
*Computer Vision, Graphics, and Image Processing*,  
40(3) :311–333, December 1987.
-  Alain Daurat, Mohamed Tajine, and Mahdi Zouaoui.  
Patterns in Discretized Parabolas and Length Estimation.  
In Srečko Brlek, Christophe Reutenauer, and Xavier Provençal,  
editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume  
5810, pages 373–384. Springer Berlin Heidelberg, Berlin,  
Heidelberg, 2009.
-  Ari Gross and Longin Latecki.  
Digitizations Preserving Topological and Differential Geometric  
Properties.  
*Computer Vision and Image Understanding*, 62(3) :370–381,  
November 1995.



S. R. Kulkarni, S. K. Mitter, T. J. Richardson, and J. N. Tsitsiklis.

Local versus non-local computation of length of digitized curves.

In Rudrapatna K. Shyamasundar, editor, *Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, pages 94–103, Berlin, Heidelberg, 1993. Springer.



Reinhard Klette and Joviša Žunić.

Multigrid Convergence of Calculated Features in Image Analysis.

*Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 13(3) :173–191, December 2000.



Jacques-Olivier Lachaud and Boris Thibert.

Properties of Gauss Digitized Shapes and Digital Surface Integration.

*Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 54(2) :162–180, February 2016.



Loïc Mazo and Étienne Baudrier.

Non-local estimators : A new class of multigrid convergent length estimators.

*Theoretical Computer Science*, 645 :128–146, September 2016.



J. W. Milnor.

On the Total Curvature of Knots.

*The Annals of Mathematics*, 52(2) :248, September 1950.



Theo Pavlidis.

*Algorithms for Graphics and Image Processing.*

Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1982.



Christian Ronse and Mohamed Tajine.

Discretization in Hausdorff Space.

*Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 12(3) :219–242,  
2000.



F. Sloboda and B. Zlatko.

On Linear Time Algorithm for the Shortest Path Problem  
Solution in a Polygonally Bounded Compact Set.

Technical report, Institute of Control Theory and Robotics,  
Bratislava, 1996.





F. Sloboda, B. Zatko, and J Stoer.

On approximation of planar one-dimensional continua.

*Advances in Digital and Computational Geometry*, January 1998.



Mohamed Tajine and Alain Daurat.

On Local Definitions of Length of Digital Curves.

In Gerhard Goos, Juris Hartmanis, Jan van Leeuwen, Ingela Nyström, Gabriella Sanniti di Baja, and Stina Svensson, editors, *Discrete Geometry for Computer Imagery*, volume 2886, pages 114–123. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2003.



Mohamed Tajine and Alain Daurat.

Patterns for multigrid equidistributed functions : Application to general parabolas and length estimation.

*Theoretical Computer Science*, 412(36) :4824–4840, August 2011.



A. M. Vossepoel and A. W. M. Smeulders.

Vector code probability and metrication error in the representation of straight lines of finite length.

*Computer Graphics and Image Processing*, 20(4) :347–364, December 1982.